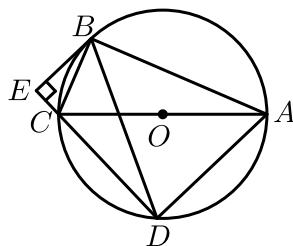


相似三角形进阶二加油站

一、相似与圆综合

1. AA普通相似

1. 如图， $\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle ABC = 90^\circ$ ，弦 $BD = BA$ ， $AB = 12$ ， $BC = 5$ ， $BE \perp DC$ 交 DC 的延长线于点 E 。



- (1) 求证： $\angle BCA = \angle BAD$ 。
(2) 求证： $\triangle ABC \sim \triangle DEB$ ，并求出 DE 的长。
(3) 求证： BE 是 $\odot O$ 的切线。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析， $DE = \frac{144}{13}$ 。

(3) 证明见解析。

【解析】 (1) $\because BD = BA$ ，

$$\therefore \widehat{BAD} = \widehat{BDA}，$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BAD。$$

(2) $\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13，$$

$$\because \angle BDE = \angle BAC，\angle ABC = \angle DEB = 90^\circ，$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEB，$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{BD}，$$

$$\therefore DE = 12 \times \frac{12}{13} = \frac{144}{13}。$$

(3) 连接 OB ， OD ，

在 $\triangle BOD$ 和 $\triangle BOA$ 中，

$$\begin{cases} BD = BA \\ BO = BO \\ OD = OA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BOD \cong \triangle BOA,$$

$$\therefore \angle DBO = \angle ABO,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle DBO = \angle BAO,$$

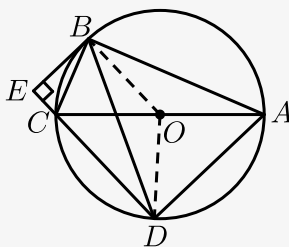
$$\text{又} \because \angle BAO = \angle BDE,$$

$$\therefore \angle DBO = \angle BDE,$$

$$\therefore BO \parallel DE,$$

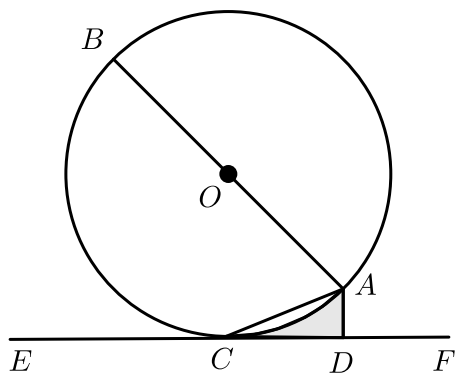
$$\therefore \angle OBE = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$



【标注】【知识点】圆与相似

2. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 是弦，直线 EF 经过点 C ， $AD \perp EF$ 于点 D ， $\angle DAC = \angle BAC$ 。



(1) 求证： EF 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 求证： $AC^2 = AD \cdot AB$ 。

(3) 若 $\odot O$ 的半径为2， $\angle ACD = 30^\circ$ ，求图中阴影部分的面积。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

$$(3) \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi.$$

【解析】(1) 连接 OC ，

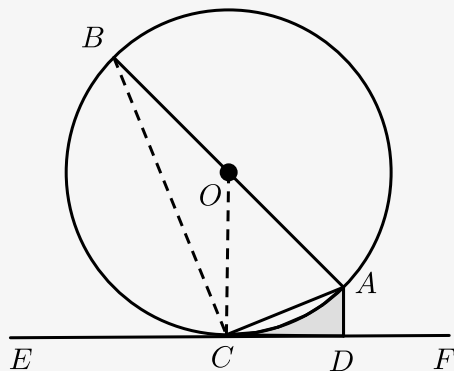
$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle OCA,$$

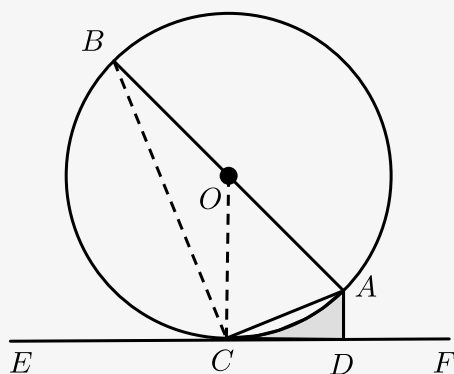
$$\therefore \angle DAC = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle DAC,$$

$\therefore OC \parallel AD$,
 $\therefore AD \perp EF$,
 $\therefore OC \perp EF$,
 $\therefore OC$ 为半径 ,
 $\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线 .



(2) 连接 BC ,
 $\therefore AB$ 为 $\odot O$ 直径 , $AD \perp EF$,
 $\therefore \angle BCA = \angle ADC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DAC = \angle BAC$,
 $\therefore \triangle ACB \sim \triangle ADC$,
 $\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$,
 $\therefore AC^2 = AD \cdot AB$.



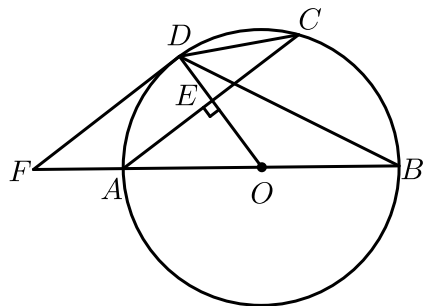
(3) $\therefore \angle ACD = 30^\circ$, $\angle OCD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle OCA = 60^\circ$,
 $\therefore OC = OA$,
 $\therefore \triangle OAC$ 是等边三角形 ,
 $\therefore AC = OA = OC = 2$, $\angle AOC = 60^\circ$,
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中 , $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1$,
 由勾股定理得 : $DC = \sqrt{3}$,
 $\therefore$ 阴影部分的面积是 $S = S_{\text{梯形}OCDA} - S_{\text{扇形}OCA}$

$$= \frac{1}{2} \times (2+1) \times \sqrt{3} - \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi.$$

【标注】【知识点】圆与相似

2. 共角、等角型相似 (A字、8字型)

3. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 半径 OD 垂直弦 AC 于点 E , F 是 BA 延长线上一点, $\angle CDB = \angle BFD$.



(1) 判断 DF 与 $\odot O$ 的位置关系, 并证明.

(2) 若 $AB = 10$, $AC = 8$, 求 DF 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $DF = \frac{20}{3}$.

【解析】(1) DF 与 $\odot O$ 相切.

$$\because \angle CDB = \angle CAB,$$

$$\text{又} \because \angle CDB = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle BFD.$$

$$\therefore AC \parallel DF.$$

$$\because \text{半径 } OD \text{ 垂直于弦 } AC \text{ 于点 } E,$$

$$\therefore OD \perp DF.$$

$$\therefore DF \text{ 与 } \odot O \text{ 相切}.$$

(2) $\because$ 半径 OD 垂直于弦 AC 于点 E , $AC = 8$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore OA = OD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEO \text{ 中}, OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

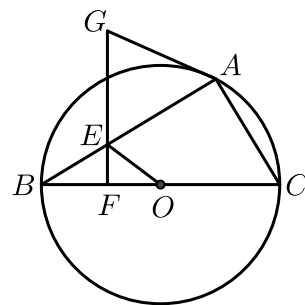
$$\because AC \parallel DF,$$

$$\therefore \triangle OAE \sim \triangle OFD.$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{OE}{OD} &= \frac{AE}{DF} \\ \therefore \frac{3}{5} &= \frac{DF}{20} \\ \therefore DF &= \frac{12}{5}\end{aligned}$$

【标注】【知识点】切线的判定定理

4. 如图，已知， $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆， BC 为直径，点 E 在 AB 上，过点 E 作 $EF \perp BC$ ，点 G 在 FE 的延长线上，且 $GA = GE$ 。

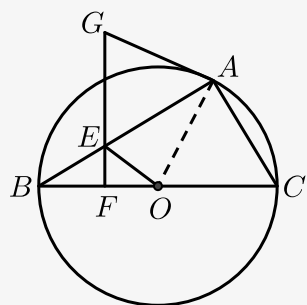


- (1) 求证： AG 与 $\odot O$ 相切。
 (2) 若 $AC = 6$ ， $AB = 8$ ， $BE = 3$ ，求线段 OE 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\sqrt{10}$ 。

【解析】(1) 如图，



连接 OA ，
 $\because OA = OB$ ， $GA = GE$
 $\therefore \angle ABO = \angle BAO$ ， $\angle GEA = \angle GAE$
 $\because EF \perp BC$ ，
 $\therefore \angle BFE = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABO + \angle BEF = 90^\circ$ ，
 又 $\because \angle BEF = \angle GEA$ ，
 $\therefore \angle GAE = \angle BEF$ ，

$$\therefore \angle BAO + \angle GAE = 90^\circ,$$

即 AG 与 $\odot O$ 相切.

(2) $\because BC$ 为直径,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, AC = 6, AB = 8,$$

$$\therefore BC = 10,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle CBA, \angle BFE = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{EF}{AC}$$

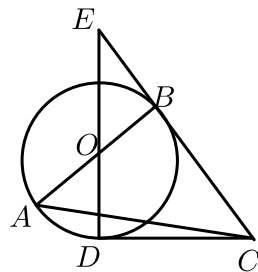
$$\therefore EF = 1.8, BF = 2.4,$$

$$\therefore OF = OB - BF = 5 - 2.4 = 2.6,$$

$$\therefore OE = \sqrt{EF^2 + OF^2} = \sqrt{10}.$$

【标注】【知识点】圆与相似

5. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线 BC , 点 D 为 $\odot O$ 上一点, 且 $CD = CB$, 连接 DO 并延长交 CB 的延长线于点 E .



(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 连接 AC , 若 $BE = 4$, $DE = 8$, 求线段 AC 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $AC = 6\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 连接 OC ,

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线,

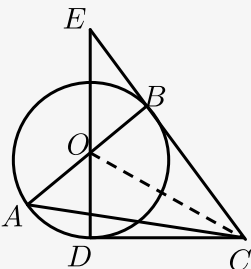
$$\therefore \angle OBC = \angle OBE = 90^\circ$$

,

$$\therefore OB = OD, OC = OC$$

, 由已知 $BC = CD$,

$$\therefore \triangle CBO \cong \triangle CDO,$$



$$\therefore \angle CDO = \angle OBC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 半径 $OD \perp CD$.

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 设 $CB = CD = x$,

$$\because BE = 4, DE = 8,$$

$$\therefore CE = CB + BE = 4 + x,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } CD^2 + DE^2 = CE^2,$$

$$\therefore x^2 + 8^2 = (4 + x)^2,$$

解得 $x = 6$.

$$\because \angle E = \angle E, \angle EBO = \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBO \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{BO}{DC} = \frac{EB}{ED} = \frac{1}{2},$$

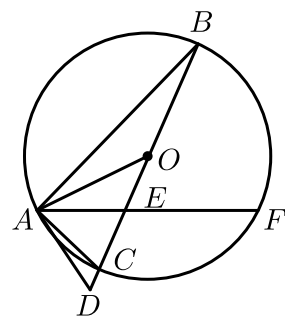
$$\therefore OB = 3,$$

$$\therefore AB = 2OB = 6,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】圆与相似

6. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, BC 是 $\odot O$ 的直径, 弦 AF 交 BC 于点 E , 延长 BC 到点 D , 连接 OA , AD , 使得 $\angle FAC = \angle AOD$, $\angle D = \angle BAF$.



(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $CE = 2$, 求 EF 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) EF = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

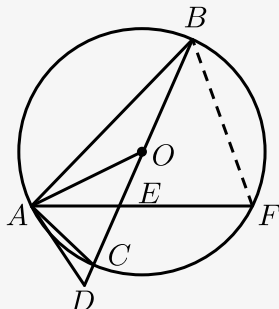
【解析】 (1) $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BAF + \angle FAC = 90^\circ.$$

$\therefore \angle D = \angle BAF, \angle AOD = \angle FAC,$
 $\therefore \angle D + \angle AOD = 90^\circ,$
 $\therefore \angle OAD = 90^\circ,$
 $\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 连接 BF ,

$\therefore$

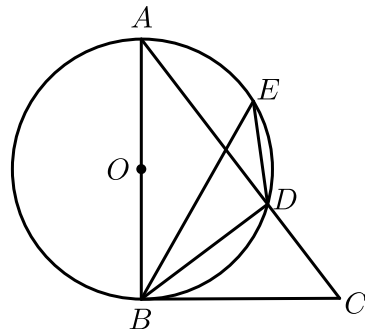


$\angle FAC = \angle AOD,$
 $\therefore \triangle ACE \sim \triangle OCA,$
 $\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{AE}{OA} = \frac{CE}{\frac{AC}{2}},$
 $\therefore \frac{AC}{5} = \frac{AE}{5} = \frac{CE}{\frac{AC}{2}},$
 $\therefore AC = AE = \sqrt{10}.$
 $\therefore \angle CAE = \angle CBF,$
 $\therefore \triangle ACE \sim \triangle BFE,$
 $\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{EF},$
 $\therefore \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{8}{EF},$
 $\therefore EF = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$

【标注】【知识点】圆与相似

3. 共角共边、等角等边型相似 (子母型)

7. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E 是 $\widehat{AD}$ 上的一点, $\angle DBC = \angle BED$.



(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 已知 $AD = 3$, $CD = 2$, 求 BC 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $BC = \sqrt{10}$.

【解析】 (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的切直径 ,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle BAD = \angle BED , \angle BED = \angle DBC ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DBC ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABD = \angle DBC + \angle ABD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ ,$$

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) $\because \angle BAD = \angle DBC , \angle C = \angle C$,

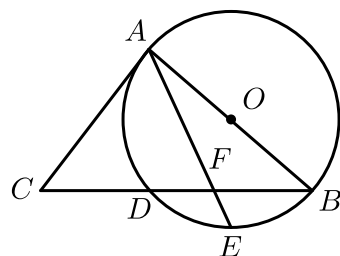
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BDC ,$$

$$\therefore \frac{BC}{CA} = \frac{CD}{BC} , \text{ 即 } BC^2 = AC \cdot CD = (AD + CD) \cdot CD = 10 ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{10} .$$

【标注】【知识点】圆与相似

8. 如图 , AB 是 $\odot O$ 的直径 , BC 交 $\odot O$ 于点 D , E 是弧 BD 的中点 , AE 与 BC 交于点 F , $\angle C = 2\angle EAB$



(1) 求证 : AC 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) 已知 $CD = 4$, $CA = 6$,

① 求 CB 的长 .

② 求 DF 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) ① $CB = 9$.

② $DF = 2$.

【解析】(1) 如图, 连接 AD ,

$\because E$ 是弧 $\widehat{BD}$ 的中点,

$\therefore \text{弧 } \widehat{DE} = \text{弧 } \widehat{EB}$

.

$\therefore$

$\angle DAE = \angle EAB$,

即 $\angle DAB = 2\angle EAB$.

$\because \angle C = 2\angle EAB$,

$\therefore \angle DAB = \angle C$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \angle CDA = 90^\circ$.

$\therefore \angle C + \angle CAD = 90^\circ$.

$\therefore \angle DAB + \angle CAD = 90^\circ$.

即 $\angle CAB = 90^\circ$.

$\therefore AC \perp OA$.

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) ① 由 (1) 得 $\angle CDA = 90^\circ$, $\angle CAB = 90^\circ$.

$\therefore \angle CDA = \angle CAB$.

$\because \angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle CDA \sim \triangle CAB$.

$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB}$.

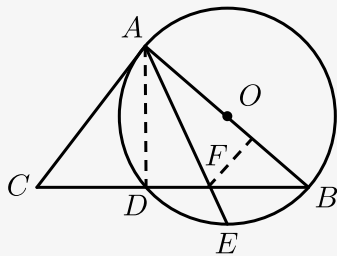
$\because CD = 4$, $CA = 6$,

$\therefore \frac{4}{6} = \frac{6}{CB}$.

$\therefore CB = 9$.

② 如图, 过点 F 作 $FH \perp AB$, 垂足为点 H .

$\therefore$

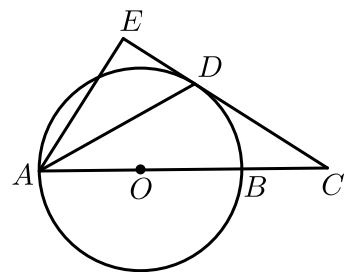


$\angle ADB = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle EAB$,

$$\begin{aligned}
&\therefore DF = FH. \\
&\because \angle FHB = 90^\circ, \\
&\because \angle CAB = 90^\circ, \\
&\therefore \angle FHB = \angle CAB. \\
&\therefore FH \parallel CA. \\
&\therefore \triangle BFH \sim \triangle BCA. \\
&\therefore \frac{FB}{CB} = \frac{FH}{CA}. \\
&\because CB = 9, CD = 4, \\
&\therefore DB = CB - CD = 9 - 4 = 5. \\
&\text{设 } DF = x, \text{ 则 } FH = x, FB = 5 - x, \\
&\therefore \frac{5 - x}{9} = \frac{x}{6}. \\
&\text{解得 } x = 2. \\
&\therefore DF = 2.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与相似

9. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 AB 的延长线上， AD 平分 $\angle CAE$ 交 $\odot O$ 于点 D ，且 $AE \perp CD$ ，垂足为点 E 。

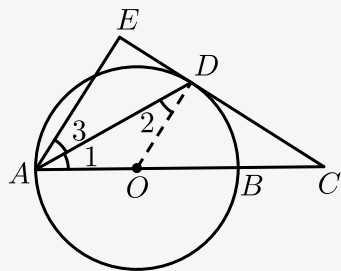


- (1) 求证：直线 CE 是 $\odot O$ 的切线。
(2) 若 $BC = 3$ ， $CD = 3\sqrt{2}$ ，求弦 AD 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $\sqrt{6}$ 。

【解析】(1) 连接 OD ，如图，



$\because AD$ 平分 $\angle EAC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 3 = \angle 2$,

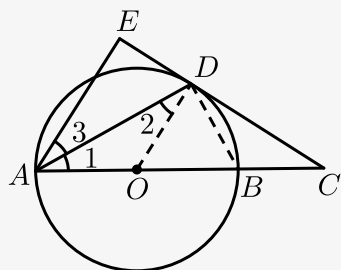
$\therefore OD \parallel AE$,

$\because AE \perp DC$,

$\therefore OD \perp CE$,

$\therefore CE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 方法一: 连接 BD .



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$\because \angle CDO = \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \angle 2 = \angle CDB = \angle 1$, $\because \angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle CDB \sim \triangle CAD$,

$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CD} = \frac{BD}{AD}$,

$\therefore CD^2 = CB \cdot CA$,

$\therefore (3\sqrt{2})^2 = 3CA$,

$\therefore CA = 6$,

$\therefore AB = CA - BC = 3$, $\frac{BD}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设 $BD = \sqrt{2}k$, $AD = 2k$,

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $2k^2 + 4k^2 = 9$,

$\therefore k = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\therefore AD = \sqrt{6}$.

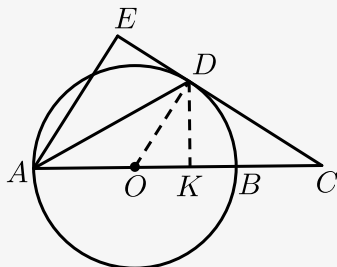
方法二：设 $OD = OA = OB = x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中， $OD^2 + CD^2 = OC^2$ ，

$$\therefore x^2 + (3\sqrt{2})^2 = (3+x)^2,$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}.$$

过点 D 作 $DK \perp AC$ 于 K ，



$$\therefore S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2} OD \cdot CD = \frac{1}{2} OC \cdot DK,$$

$$\therefore DK = \sqrt{2},$$

$$\therefore OK = \sqrt{OD^2 - DK^2} = \frac{1}{2},$$

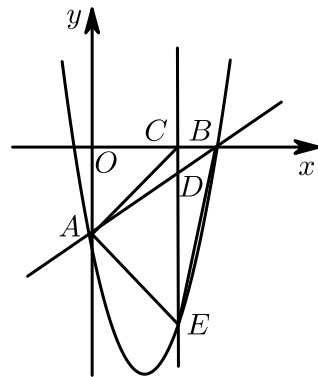
$$\therefore AK = 2,$$

$$\therefore DA = \sqrt{AK^2 + DK^2} = \sqrt{6}.$$

【标注】【知识点】圆与等腰+平行线

二、相似与二次函数综合

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x + m$ 与坐标轴 y 轴交于点 A ，与 x 轴交于点 B ，过 A, B 两点的抛物线 $y = x^2 + nx - 8$ ，点 D 为线段 AB 上一动点，过点 D 作 CD 垂直 x 轴于点 C ，交抛物线于点 E 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 当 $DE = 12$ 时，求四边形 $CAEB$ 的面积。
- (3)

是否存在点 D ，使得 $\triangle DEB$ 和 $\triangle DAC$ 相似？若存在，求出点 D 的坐标，若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = x^2 - 7x - 8$.

(2) 72或56 .

(3) 存在，此时点 D 的坐标为： $(\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-17 + \sqrt{33}}{2})$ 或 $(6, -2)$.

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = x + m$ 与抛物线 $y = x^2 + nx - 8$ 都经过 A 点，

$$\therefore m = -8 ,$$

$\because$ 直线 $y = x + m$ 经过 x 轴上的 B 点，

$$\therefore \text{点} B(8, 0) ,$$

又 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + nx - 8$ 经过 B 点，

$$\therefore n = -7 ,$$

$$\therefore \text{抛物线为：} y = x^2 - 7x - 8 .$$

(2) 设点 C 为： $(x, 0)$ ，则点 D 为 $(x, x - 8)$ ，点 E 为 $(x, x^2 - 7x - 8)$ ，

$$\therefore DE = 12 ,$$

$$\therefore (x - 8) - (x^2 - 7x - 8) = 12 ,$$

$$\text{解得：} x_1 = 2 , x_2 = 6 ,$$

$$\text{当} x = 2 \text{时，} x^2 - 7x - 8 = -18 ,$$

$$\therefore CE = 18 , \text{四边形} CAEB \text{的面积} = \frac{1}{2} OB \times CE = 72 ,$$

$$\text{当} x = 6 \text{时，} x^2 - 7x - 8 = -14 ,$$

$$\therefore CE = 14 , \text{四边形} CAEB \text{的面积} = \frac{1}{2} OB \times CE = 56 .$$

(3) 存在，当 $AC \parallel BE$ 时， $\triangle DEB \sim \triangle DCA$ ，

过点 A 作 $AF \perp CE$ 于点 F ，

$$\frac{AF}{CF} = \frac{BC}{CE} ,$$

$$\text{即} \frac{x}{8} = \frac{8 - x}{0 - (x^2 - 7x - 8)} ,$$

$$\therefore x^2 + x - 8 = 0 ,$$

$$\text{解得：} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} , x_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \text{ (舍去)} ,$$

$$\text{当} \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{DE} \text{时，} \triangle DEB \sim \triangle DAC , \text{即} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{(x - 8) - (x^2 - 7x - 8)} ,$$

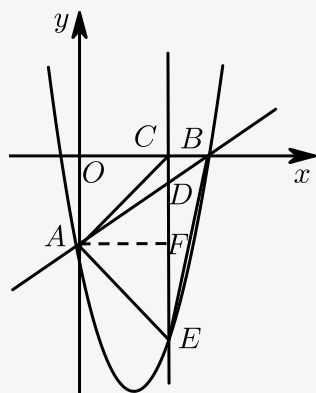
$$\therefore x^2 - 6x = 0 ,$$

$$\text{解得：} x_1 = 6 , x_2 = 0 \text{ (舍去)} ,$$

综上所述：当 $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2}$ 或 $x = 6$ 时， $\triangle DEB$ 和 $\triangle DAC$ 相似，

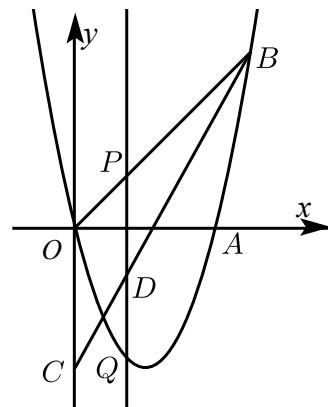
$$\text{则 } x - 8 = \frac{-17 + \sqrt{33}}{2} \text{ 或 } -2,$$

$$\text{此时点 } D \text{ 的坐标为: } \left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-17 + \sqrt{33}}{2} \right) \text{ 或 } (6, -2).$$



【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

11. 如图，抛物线 $y = x^2 - 4x$ 经过点 $O(0, 0)$ 、 $A(4, 0)$ 、 $B(5, 5)$ ，点 $C(0, -4)$ ，点 P 线段 OB 上一动点（与 O 、 B 不重合），过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴交 BC 于点 D ，交抛物线于点 Q ，是否存在 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle OBC$ 相似？若存在，求出点 P 坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】 存在， $P_1\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ， $P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 。

【解析】 当点 P 在线段 OB 上（即 $0 < x < 5$ 时），

$$\because PQ \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle BOC = 135^\circ.$$

$$\text{当 } \frac{PB}{OB} = \frac{PQ}{OC} \text{ 时, } \triangle PBQ \sim \triangle OBC.$$

这时，抛物线 $y = x^2 - 4x$ 与直线 l 的交点就是满足题意的点 Q ，

$$\text{那么 } x^2 - 4x = \frac{9}{5}x - 4,$$

$$\text{解得 } x_1 = 5 \text{ (舍去)}, x_2 = \frac{4}{5},$$

$$\therefore P_1\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right);$$

又当 $\frac{PB}{OC} = \frac{PQ}{OB}$ 时, $\triangle PQB \sim \triangle OBC$.

$\therefore PB = \sqrt{2}(5-x)$, $PQ = x - (x^2 - 4x) = 5x - x^2$, $OC = 4$, $OB = 5\sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}(5-x)}{4} = \frac{5x-x^2}{5\sqrt{2}},$$

整理得 $2x^2 - 15x + 25 = 0$,

解得 $x_1 = 5$ (舍去), $x_2 = \frac{5}{2}$,

$\therefore P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

当点 P 在点 O 左侧 (即 $x < 0$ 时),

$\therefore PQ \parallel y$ 轴,

$\therefore \angle BPQ = 45^\circ$, $\triangle BPQ$ 中不可能出现 135° 的角, 这时以 P, Q, B 为顶点的三角形不可能与 $\triangle OBC$ 相似.

当点 P 在点 B 右侧 (即 $x > 5$) 时,

$\therefore \angle BPQ = 135^\circ$,

$\therefore$ 符合条件的点 Q 即在抛物线上, 同时又在直线 l 上;

或者即在抛物线上, 同时又在 Q_2, B 所在直线上 (Q_2 为上面求得的 P_2 所对应).

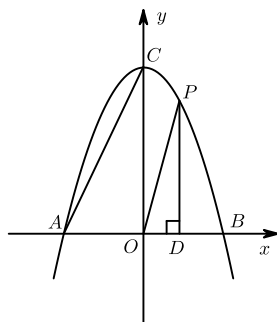
$\therefore$ 直线 l (或直线 Q_2B) 与抛物线的交点均在 $0 < x \leq 5$ 内, 而直线与抛物线交点不可能多于两个,

$\therefore x > 5$ 时, 以 P, Q, B 为顶点的三角形也不可能与 $\triangle OBC$ 相似.

综上所述, 符合条件的点 P 的坐标只有两个: $P_1\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

12. 如图, 抛物线 $y = -x^2 + 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 点 P 是抛物线上的一个动点且在第一象限, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 D . 是否存在以点 P, O, D 为顶点的三角形与 $\triangle OAC$ 相似? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 存在, 证明见解析.

【解析】 存在符合条件的三角形.

令 $x = 0$ 得, 则点 C 的坐标为 $(0, 4)$,

令 $y = 0$ 得, $-x^2 + 4 = 0$, 解得 $x = \pm 2$,

$\therefore$ 点 A 在 x 轴的负半轴,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$,

$\therefore CO = 4, AO = 2$.

设点 P 的坐标为 $(x, -x^2 + 4)$, $0 < x < 2$,

$\therefore \triangle OAC$ 与 $\triangle PDO$ 都是直角三角形,

$\therefore$ 可分以下两种情况分类讨论:

① 当 $\triangle PDO \sim \triangle COA$ 时, $\frac{PD}{CO} = \frac{OD}{AO}$, 即 $\frac{-x^2 + 4}{4} = \frac{x}{2}$,

解得 $x_1 = \sqrt{5} - 1$, $x_2 = -\sqrt{5} - 1$ (不符合题意, 舍去).

此时, 点 P 的坐标为 $(\sqrt{5} - 1, 2\sqrt{5} - 2)$.

② 当 $\triangle PDO \sim \triangle AOC$ 时, $\frac{PD}{AO} = \frac{OD}{CO}$, 即 $\frac{-x^2 + 4}{2} = \frac{x}{4}$,

解得 $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{4}$, $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}$ (不符合题意, 舍去).

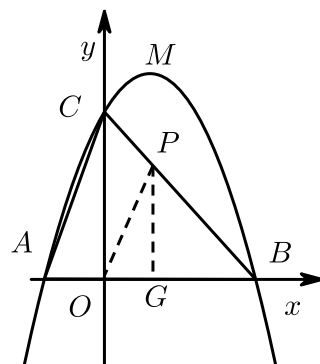
此时, 点 P 的坐标为 $\left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{65}}{8}\right)$.

综上所述, 满足条件的点 P 的坐标为 $(\sqrt{5} - 1, 2\sqrt{5} - 2)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{65}}{8}\right)$.

故答案为: 满足条件的点 P 的坐标为 $(\sqrt{5} - 1, 2\sqrt{5} - 2)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{65}}{8}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

13. 如图, 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 在线段 BC 边上是否存在点 P , 使得以 B 、 O 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle BAC$ 相似? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 存在, $P_1(1, 2)$, $P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

【解析】 由题可知, $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$,

$$\therefore AB = 4, OB = OC = 3, BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ,$$

①当 $\triangle BPO \sim \triangle BAC$ 时, 有

$$\frac{BP}{OB} = \frac{BA}{BC}, \text{ 即 } \frac{BP}{3} = \frac{4}{3\sqrt{2}}, \therefore BP = 2\sqrt{2},$$

过点 P 作 $PG \perp x$ 轴, 交 x 轴于点 G ,

$$\therefore BG = PG = \frac{\sqrt{2}}{2} BP = 2, OG = 1,$$

$$\therefore P_1(1, 2).$$

②当 $\triangle BPO \sim \triangle BCA$ 时,

$$\frac{BP}{OB} = \frac{BC}{BA}, \text{ 即 } \frac{BP}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \therefore BP = \frac{9\sqrt{2}}{4},$$

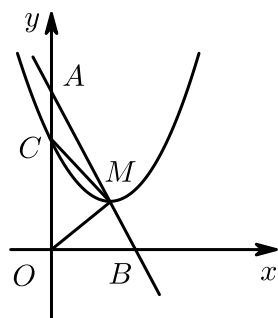
$$\therefore BG = PG = \frac{\sqrt{2}}{2} BP = \frac{9}{4}, OG = \frac{3}{4},$$

$$\therefore P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

综上所述, 所有满足条件的 P 点是 $P_1(1, 2), P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

14. 如图, 已知点 $A(0, 4)$ 、 $B(2, 0)$, 点 M 为线段 AB 上一动点 (不与点 A 、 B 重合), 以 M 为顶点的抛物线 $y = (x - m)^2 + n$ 与线段 OA 交于点 C .



- (1) 求直线 AB 的函数解析式及线段 AC 的长 (用含 m 的式子表示).
 (2) 是否存在某一时刻, 使得 $\triangle ACM$ 与 $\triangle AMO$ 相似? 若存在, 求出此时 m 的值.

【答案】 (1) $y = -2x + 4; -m^2 + 2m$.

(2) 存在; 理由见解析.

【解析】 (1) 设直线 AB 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{代入点 } A(0, 4), B(2, 0), \text{ 得 } \begin{cases} b = 4 \\ 2k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 4 \end{cases},$$

由题意可知, 抛物线顶点 M 坐标为 (m, n) ,

$\therefore$ 点 M 在线段 AB 上,

$$\therefore n = -2m + 4,$$

设抛物线为 $y = (x - m)^2 - 2m + 4$, 当 $x = 0$ 时, $y = (x - m)^2 - 2m + 4$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(0, m^2 - 2m + 4)$,

$\therefore A(0, 4)$

$$\therefore AC = 4 - (m^2 - 2m + 4) = -m^2 + 2m.$$

(2) 存在

$\therefore \angle CAM = \angle MAO, \angle AMC \neq \angle AMO$,

$\therefore$ 当 $\triangle ACM \sim \triangle AMO$ 时, $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{AO}$,

$\therefore A(0, 4), M(m, -2m + 4)$,

$$\therefore AM = \sqrt{m^2 + 4m^2} = \sqrt{5}m, AO = 4$$

$$\therefore AC = -m^2 + 2m,$$

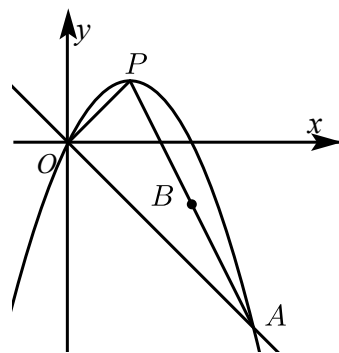
$$\therefore 5m^2 = -4m^2 + 8m,$$

$$\therefore m_1 = 0 \text{ (舍)}, m_2 = \frac{8}{9}$$

$\therefore$ 存在一时刻使得 $\triangle ACM$ 与 $\triangle AMO$ 相似, 且此时 $m = \frac{8}{9}$.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

15. 如图, 已知直线 $y = -x$ 与二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象交于点 A 、 O , O 是坐标原点, $OA = 3\sqrt{2}$, 点 P 为二次函数图象的顶点, 点 B 是 AP 的中点.



- (1) 求点 A 的坐标和二次函数的解析式.
 (2) 求线段 OB 的长.
 (3) 射线 OB 上是否存在点 M , 使得 $\triangle AOM$ 与 $\triangle AOP$ 相似? 若存在, 请求点 M 的坐标. 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 点 $A(3, -3)$, $y = -x^2 + 2x$.

(2) $OB = \frac{1}{2}AP = \sqrt{5}$.

(3) 存在, 点 M 坐标为 $(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5})$ 或 $(4, -2)$.

【解析】(1) $\because$ 点 A 在直线 $y = -x$ 上, 且 $OA = 3\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 A 坐标 $(3, -3)$,

$\because$ 点 $O(0, 0)$, 点 $A(3, -3)$,

在 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} 0 = c \\ 9 + 3b + c = -3 \end{cases}$$

解得 $b = 2, c = 0$,

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x$.

(2) 由 (1) 得二次函数图象的顶点 $P(1, 1)$,

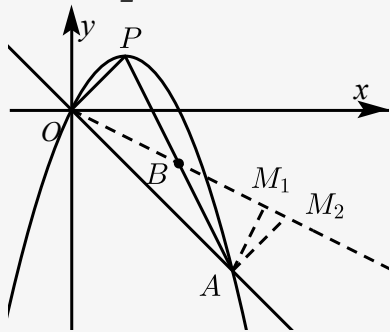
所以 $AP = 2\sqrt{5}$,

$\because$ 点 A 在 $y = -x$ 的图象上, 可得点 P 在 $y = x$ 的图象上,

$\therefore \angle AOP = 90^\circ$,

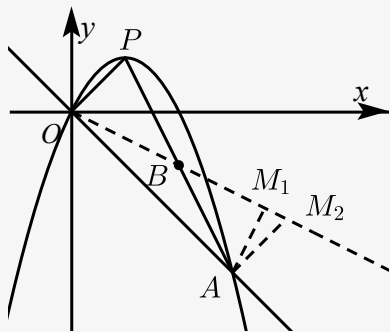
又 $\because \triangle AOP$ 中, 点 B 为 AP 的中点

$$\therefore OB = \frac{1}{2}AP = \sqrt{5}.$$



(3) 理由如下:

如图, 连接 OB 并延长, 过点 A 作 $AM_1 \perp OB$, 垂足为 M_1 ,



$\because \angle POA = \angle AM_1O = 90^\circ, \angle PAO = \angle AOM_1$

$\therefore \triangle AOP \sim \triangle OM_1A$,

则有: $\frac{OM_1}{AO} = \frac{AO}{PA}$, 可得, $OM_1 = \frac{9\sqrt{5}}{5}$,

由 $OB = \sqrt{5}$ 得点 $B(2, -1)$

$\therefore M_1$ 的坐标为 $\left(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

又过点 A 作 $AM_2 \perp OA$, 交 OB 延长线于 M_2 ,

$$\because \angle POA = \angle M_2AO = 90^\circ, \angle PAO = \angle M_2OA,$$

$$\therefore \triangle AOP \sim \triangle OAM_2,$$

$$\text{则有 } \frac{OM_2}{PA} = \frac{AO}{AO}, \text{ 可得, } OM_2 = 2\sqrt{5},$$

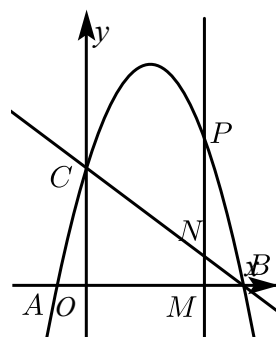
$$\text{由 } OB = \sqrt{5} \text{ 得点 } B(2, -1),$$

$$\therefore M_2 \text{ 的坐标为 } (4, -2),$$

$$\text{综上可知: 点 } M \text{ 坐标为 } \left(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}\right) \text{ 或 } (4, -2).$$

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 B 、 C ; 经过 B 、 C 两点的抛物线 $y = -x^2 + bx + c$, 与 x 轴交于另一点 A . 点 P 是在第一象限内抛物线上的一个动点, 过点 P 作直线 $l \parallel y$ 轴交 x 轴于点 M , 交直线 BC 于点 N .



- (1) 求该抛物线所对应的函数关系式.
 (2) 是否存在以 P 、 C 、 N 为顶点的三角形与 $\triangle BNM$ 相似? 若存在, 求出点 N 坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 该抛物线所对应的函数关系式是 $y = -x^2 + \frac{13}{4}x + 3$.

(2) 存在, 坐标为 $N_1\left(\frac{23}{12}, \frac{25}{16}\right)$, $N_2\left(3, \frac{3}{4}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 B 、 C ,

$$\therefore B(4, 0), C(0, 3),$$

$$\because \text{抛物线 } y = -x^2 + bx + c \text{ 经过 } B、C \text{ 两点},$$

$$\therefore \begin{cases} -16 + 4b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = \frac{13}{4} \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -x^2 + \frac{13}{4}x + 3.$$

$$\text{故答案为: 该抛物线所对应的函数关系式是 } y = -x^2 + \frac{13}{4}x + 3.$$

$$(2) \because CO \parallel MN,$$

$$\therefore \triangle COB \sim \triangle NMB,$$

$$\therefore \triangle PCN \sim \triangle MNB,$$

$$\therefore \triangle COB \sim \triangle PCN,$$

$$\textcircled{1} \angle PCN = 90^\circ \text{ 时, } \frac{PN}{BC} = \frac{CN}{OC}, \text{ 即 } \frac{-x^2 + 4x}{5} = \frac{\frac{5}{4}x}{3}, \text{ 解得 } x_1 = \frac{23}{12},$$

$$x_2 = 0 \text{ (舍去)},$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \angle CPN = 90^\circ \text{ 时, } \frac{PN}{OC} = \frac{CN}{BC}, \text{ 即 } \frac{-x^2 + 4x}{3} = \frac{\frac{5}{4}x}{5}, \text{ 解得: } x_1 = 3,$$

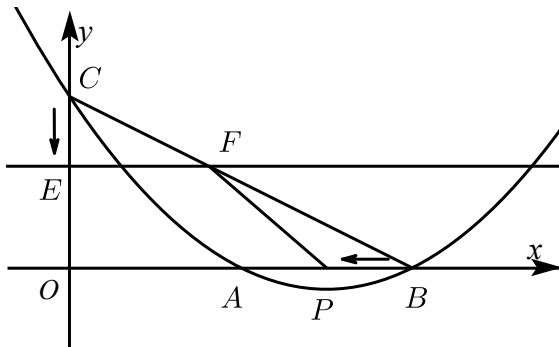
$$x_2 = 0 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{ 存在 } N_1 \left(\frac{23}{12}, \frac{25}{16} \right), N_2 \left(3, \frac{3}{4} \right).$$

$$\text{故答案为: 存在, 坐标为 } N_1 \left(\frac{23}{12}, \frac{25}{16} \right), N_2 \left(3, \frac{3}{4} \right).$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

17. 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 点在 B 点左侧), 与 y 轴交于点 C , 动直线 EF ($EF \parallel x$ 轴) 从点 C 开始, 以每秒 1 个单位的速度沿 y 轴负方向平移, 且分别交 y 轴、线段 BC 于 E 、 F 两点, 动点 P 同时从点 B 出发, 在线段 OB 上以每秒 2 个单位的速度向原点 O 运动, 是否存在 t , 使得 $\triangle BPF$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 若存在, 试求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 $t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = \frac{20}{7}.$

【解析】 $BA = 4, AC = 4\sqrt{2}, BC = 4\sqrt{5},$

依题意得: $BP = 2t,$

$$\therefore CE = t, \tan \angle ABC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EF = 2t,$$

$$\therefore CF = \sqrt{5}t,$$

$$\therefore BF = 4\sqrt{5} - \sqrt{5}t,$$

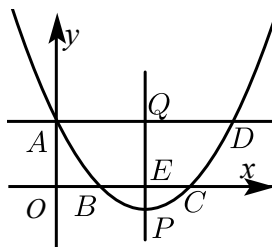
$$\text{由 } \triangle BPF \sim \triangle BAC \text{ 得 } \frac{4\sqrt{5} - \sqrt{5}t}{4\sqrt{5}} = \frac{2t}{4},$$

$$\text{得 } t_1 = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} & \text{由} \triangle BPF \sim \triangle BCA \text{得} \frac{4\sqrt{5} - \sqrt{5}t}{4} = \frac{2t}{4\sqrt{5}}, \\ & \text{化简} t_2 = \frac{20}{7}, \\ & \text{故答案为: } t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = \frac{20}{7}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 3)$, 与 x 轴交于点 B 、 C , 点 B 的横坐标为 2. 点 D 和点 A 关于抛物线的对称轴对称, 在 x 轴上有一动点 $E(t, 0)$, 过点 E 作平行于 y 轴的直线与抛物线、直线 AD 的交点分别为 P 、 Q .



- (1) 求抛物线的解析式.
 (2) 当 $t > 2$ 时, 是否存在点 P , 使以 A 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 相似. 若存在, 求出此时 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.

(2) 当 t 的值为 $\frac{16}{3}$ 或 $\frac{32}{3}$ 或 14 时, 存在点 P , 使以 A 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 相似.

【解析】 (1) 将 $A(0, 3)$ 、 $B(2, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$, 得:

$$\begin{cases} c = 3 \\ \frac{1}{4} \times 2^2 + 2b + c = 0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.

故答案为: 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$.

(2) 假设存在, $\because \angle AOB = \angle AQP = 90^\circ$,

$\therefore$ 分 $\triangle AOB \sim \triangle AQP$ 和 $\triangle AOB \sim \triangle PQA$ 两种情况考虑.

$$\because A(0, 3), B(2, 0), Q(t, 3), P\left(t, \frac{1}{4}t^2 - 2t + 3\right),$$

$$\therefore AO = 3, BO = 2, AQ = t, PQ = \left| \frac{1}{4}t^2 - 2t \right|.$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle AOB \sim \triangle AQP \text{ 时, 有 } \frac{AO}{BO} = \frac{AQ}{PQ}, \text{ 即 } \frac{3}{2} = \frac{t}{\left| \frac{1}{4}t^2 - 2t \right|},$$

$$\text{解得: } t_1 = 0 \text{ (舍去)}, t_2 = \frac{16}{3}, t_3 = \frac{32}{3},$$

经检验, $t_2 = \frac{16}{3}$ 、 $t_3 = \frac{32}{3}$ 是所列分式方程的解;

②当 $\triangle AOB \sim \triangle PQA$ 时, 有 $\frac{AO}{BO} = \frac{PQ}{AQ}$, 即 $\frac{3}{2} = \frac{|\frac{1}{4}t^2 - 2t|}{t}$,

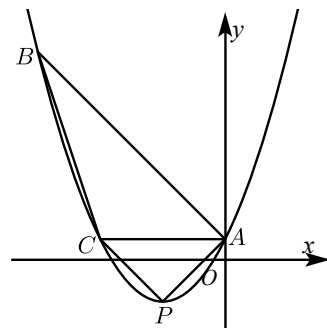
解得: $t_4 = 0$ (舍去), $t_5 = 2$ (舍去), $t_6 = 14$,

经检验, $t_6 = 14$ 是所列分式方程的解.

综上所述: 当 t 的值为 $\frac{16}{3}$ 或 $\frac{32}{3}$ 或 14 时, 存在点 P , 使以 A 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 相似.

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

19. 如图, 已知抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点, 其中点 $A(0, 1)$, 点 $B(-9, 10)$, $AC \parallel x$ 轴, 点 P 是直线 AC 下方抛物线上的动点.



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 当点 P 为抛物线的顶点时, 在直线 AC 上是否存在点 Q , 使得以 C 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 若存在, 求出点 Q 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.

(2) 存在. $(-4, 1)$ 或 $(3, 1)$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(0, 1)$, $B(-9, 10)$ 在抛物线上,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.

故答案为: $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.

(2) $\because y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 2$,

$\therefore P(-3, -2)$,

$\therefore PF = y_F - y_P = 3$, $CF = x_F - x_C = 3$,

$\therefore PF = CF$,

$\therefore \angle PCF = 45^\circ$.

同理可得: $\angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle PCF = \angle EAF$,

∴在直线AC上存在满足条件的Q，

设 $Q(t, 1)$ 且 $AB = 9\sqrt{2}$ ， $AC = 6$ ， $CP = 3\sqrt{2}$ 。

∴以C、P、Q为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，

①当 $\triangle CPQ \sim \triangle ABC$ 时，

$$\therefore \frac{CQ}{AC} = \frac{CP}{AB}, \therefore \frac{|t+6|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}},$$

∴ $t = -4$ 或 $t = -8$ （不符合题意，舍）

∴ $Q(-4, 1)$

②当 $\triangle CQP \sim \triangle ABC$ 时，

$$\therefore \frac{CQ}{AB} = \frac{CP}{AC}, \therefore \frac{|t+6|}{9\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{6},$$

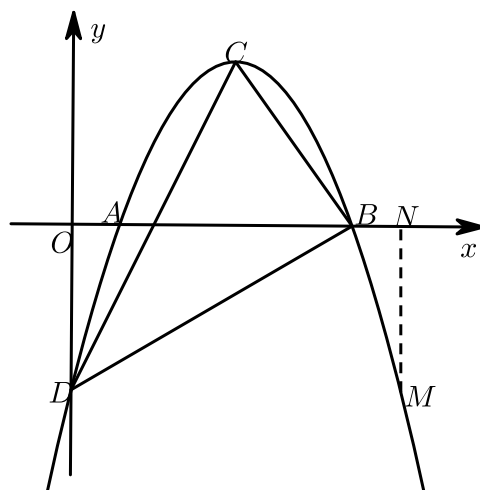
∴ $t = 3$ 或 $t = -15$ （不符合题意，舍）

∴ $Q(3, 1)$ 。

故答案为： $(-4, 1)$ 或 $(3, 1)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

20. 如图，抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 与x轴交于两点A、B，与y轴交于点D，在抛物线上是否存在点M，过M作 $MN \perp x$ 轴于点N，使以A、M、N为顶点的三角形与 $\triangle BCD$ 相似？若存在，则求出点M的坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】 满足条件的M点有 $M_1(0, -3)$ ， $M_2(6, -15)$ ， $M_3\left(\frac{10}{3}, -\frac{7}{9}\right)$ ， $M_4\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{9}\right)$ 。

【解析】 如图，由题易得， $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(2, 1)$ ， $D(0, -3)$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{2}, BD = 3\sqrt{2}, CD = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BC^2 + BD^2 = CD^2$$

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ = \angle ANM$$

设 $M(m, -m^2 + 4m - 3)$, 则 $N(m, 0)$,

$$MN = |-m^2 + 4m - 3| = |m - 1||m - 3|, AN = |m - 1|$$

①当 $\triangle ANM \sim \triangle CBD$

$$\text{则 } \frac{MN}{AN} = \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } \frac{|m - 1||m - 3|}{|m - 1|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore m \neq 1, \therefore |m - 3| = 3.$$

解得 $m = 0$ 或 6 .

$$\therefore M_1(0, -3), M_2(6, -15)$$

②当 $\triangle ANM \sim \triangle DBC$,

$$\text{则 } \frac{MN}{AN} = \frac{BC}{BD}, \text{ 即 } \frac{|m - 1||m - 3|}{|m - 1|} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}},$$

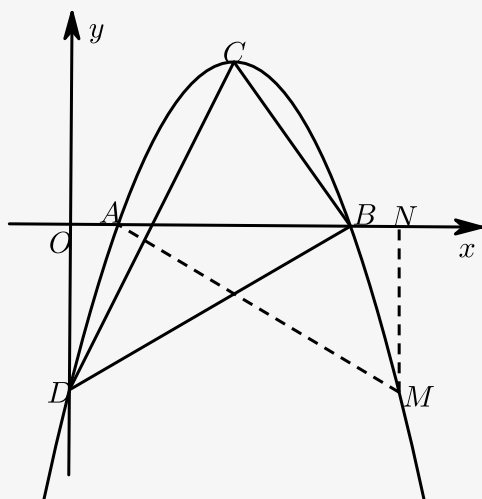
$$\therefore m \neq 1, \therefore |m - 3| = \frac{1}{3}.$$

$$\text{解得 } m = \frac{10}{3} \text{ 或 } \frac{8}{3}.$$

$$\therefore M_3\left(\frac{10}{3}, -\frac{7}{9}\right), M_4\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{9}\right).$$

综上所述, 满足条件的 M 点有 $M_1(0, -3)$, $M_2(6, -15)$, $M_3\left(\frac{10}{3}, -\frac{7}{9}\right)$,

$$M_4\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{9}\right).$$



【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合